Manuel López Mateos

MATEMÁTICAS COMIPEMS

aprendo con la Guía Interactiva

MLM
EDITOR
2018

Manuel López Mateos

Manuel López Mateos

MATEMÁTICAS COMIPEMS

aprendo con la Guía Interactiva

MLM
EDITOR
2018

Primera edición, 2018

©2018 MLM EDITOR

Matamoros s/n
Primera Sección
Xadani, Oaxaca
C.P. 70125
México

Información para catalogación bibliográfica:

López Mateos, Manuel.
Matemáticas Comipems, aprendo con la Guía Interactiva / Manuel López Mateos — 1a ed.
viii–47 p. cm.

1. Matemáticas 2. Resolución de problemas 3. Comipems 4. Examen ingreso 5. Bachillerato 6. Secundaria 8. Habilidades I. López Mateos, Manuel, 1945- II. Título.

Producido en México

MLM
EDITOR

https://aprendomate.mi-libro.club

Índice general

Introducción

El Concurso de Asignación a la Educación Media Superior (CAEMS) lo organiza la Comisión Metropolitana de Instituciones Públicas de Educación Media Superior (COMIPEMS) en el área conurbada de la ciudad de México.

En la parte de Contenido de la *Guía Interactiva 2018* [2] del Concurso de asignación, disponible para descargar e instalar en la página web del COMIPEMS[1], se menciona que «El examen de la Comipems evalúa sólo los conocimientos y habilidades indispensables para que ingreses a la educación media superior, y que debes haber aprendido gracias al trabajo regular en la escuela secundaria».

Abarca dos áreas: habilidades intelectuales y conocimientos disciplinarios. Las habilidades son de razonamiento verbal y razonamiento matemático. Los conocimientos corresponden al plan de estudios de las asignaturas de biología, español, física, formación cívica y ética, geografía, historia, matemáticas y química.

1 *Ver* https://www.comipems.org.mx/

Capacitarse para hacer un buen papel en las matemáticas exigidas no es difícil, se requieren dos cosas, la primera es de carácter técnico: hay que manejar las operaciones elementales, es decir la suma, resta, multiplicación y división de enteros, quebrados y decimales, y la segunda es de actitud: abrir la mente, darse a entender y entender al otro, escuchar la crítica y saber opinar de manera crítica. Con estas dos condiciones estaremos en capacidad de comprender lo que significa resolver un problema. Ahora bien, hay una tercera condición, como en toda actividad, para dominarla hay que practicar.

En este folleto explicamos los problemas de matemáticas propuestos por el COMIPEMS en la *Guía Interactiva*, presentando así un abanico de métodos que cubren buena parte del material requerido.

¿Qué significa resolver un problema? Según George Pólya, "resolver un problema significa hallar una manera de superar una dificultad, o rodear un obstáculo, para lograr un objetivo que no podía obtenerse de inmediato"[2] [6].

¿Cómo resolver problemas? En su popular obra *How to Solve it* (Cómo resolverlo) [5], George Pólya propone un método, llamado *de los cuatro pasos* de Pólya para resolver problemas:

1. **Comprender el problema**: ¿Qué nos están preguntando?, ¿Cuál es la incógnita? ¿A qué pregunta debemos responder? ¿Podemos expresar el problema con nuestras propias palabras?

2. **Trazar un plan**: Escoger una estrategia, hay multitud: Buscar un patrón, resolver una ecuación, trazar un diagrama, hacer una tabla o una lista, analizar un caso más

[2] Pólya, G. *Mathematical Discovery, Combined Edition*. New York. John Wiley & Sons, Inc., 1981. p. IX

sencillo, hacer un modelo algebraico, proponer y rectificar (*ir atinándole*), o alguna otra.

3. **Llevar a cabo el plan**: Una vez decidida la estrategia hay que realizarla, que llevarla a cabo, es importante actuar conforme lo hayamos planeado.

4. **Revisar el resultado**: ¿Seguimos el plan, realizamos bien las cuentas?, ¿La respuesta es sensata, cumple todas las condiciones solicitadas?, ¿No hay otros resultados posibles?, ¿El método de solución se aplica a otros casos parecidos o más generales?

Hay muchas recomendaciones a partir de los famosos cuatro pasos. Una recopilación importante la pueden encontrar en [1, p. 4][3].

La obra de Pólya *How to Solve It* (Cómo resolverlo), con el título *Cómo plantear y resolver problemas* [4] fue publicada en México por la Editorial Trillas en 1989.

Manuel López Mateos
manuel@cedmat.net
https://cedmat.net
10 de diciembre de 2018
19:40

[3] Billstein, R. Shlomo, L., Lott, J. W. *MATEMÁTICAS: Un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*. México. López Mateos Editores, 2012. p. 4.

1 Factores y productos notables

Relaciona los factores con los productos notables.

	Factor		Producto
1.	$(2a+3)(2a-3)$	**a.**	$4a^2+4a-15$
2.	$(2a+5)(2a-3)$	**b.**	$8a^3-1$
3.	$(2a-3)(2a-3)$	**c.**	$4a^2-9$
4.	$(2a-1)(4a^2+2a+1)$	**d.**	$4a^2-12a+9$

- ○ **A)** 1d, 2b, 3c, 4a
- ○ **B)** 1b, 2d, 3a, 4c
- ○ **C)** 1c, 2a, 3d, 4b
- ○ **D)** 1c, 2d, 3b, 4a

Lo primero que debemos hacer es ***comprender*** el problema.

¿Qué nos preguntan?

Vemos el formato del cuestionario. En el primer párrafo se hace una pregunta y en el segundo se colocan cuatro propuestas de respuesta. Se trata de elegir la propuesta correcta.

Se pide relacionar los factores con los *productos notables*[1] y se presentan dos columnas, a la izquierda factores o productos de expresiones algebraicas, y a la derecha una columna de resultados.

En el segundo párrafo hay cuatro propuestas para relacionar los factores con las columnas.

¿Cuál es nuestro plan?

Comenzando por el primer factor localizamos a qué producto corresponde, vemos qué respuesta contiene esa asociación, si nada más es una, ¡esa es la respuesta! Si hay dos o más respuestas que contengan esa asociación, continuamos con el factor siguiente, hasta *aislar* la respuesta correcta.

El primer factor es $(2a+3)(2a-3)$. Se trata de un producto de *binomios conjugados*, sólo difieren en el signo. El resultado de este producto es la *diferencia de cuadrados*[2] $(2a)^2 - 3^2$ que es igual a $4a^2 - 9$, que corresponde al producto **c**. Así, la primera relación es **1c**.

Vemos que las respuestas **C)** y **D)** contienen esa relación, así que una de ellas es la correcta.

Seguimos con el segundo factor, $(2a + 5)(2a - 3)$. Se trata de un producto de dos *binomios con un término común*, a saber $2a$, su producto es «*el primero al cuadrado más la suma de los dos productos cruzados más el producto de los segundos*», es decir

$$\begin{aligned}(2a+5)(2a-3) &= (2a)^2 + (10a - 6a) + (5)(-3)\\ &= 4a^2 + 4a - 15.\end{aligned}$$

[1] *Ver* https://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables

[2] Si quieres, puedes efectuar el producto de los dos binomios:

$$\begin{aligned}(2a+3)(2a-3) &= 2a(2a-3) + 3(2a-3)\\ &= 4a^2 - 6a + 6a - 9\\ &= 4a^2 - 9.\end{aligned}$$

Es el producto marcado con la letra **a**, luego la segunda relación es **2a**.

De las respuestas **C)** y **D)** que son las que contienen a la primera relación **1c**, *sólo* la **C)** contiene además a la relación **2a**, luego **C)** es la respuesta correcta.

Ya sabemos la respuesta, es **C)**, y la marcamos en el círculo contiguo. ☺

¡Momento, momento! ¿Y qué pasa con los productos **3** y **4**, no vamos a efectuarlos?

Bueno, la pregunta ***no*** es que *efectuemos* los productos sino que los *relacionemos* con su resultado. Para hallar la respuesta bastó calcular los dos primeros, pero podemos continuar y, a manera de verificación, calcular los restantes.

El factor **3** es $(2a-3)(2a-3)$. Se trata de un binomio multiplicado por sí mismo, es decir un *binomio al cuadrado*, para efectuar ese producto, en la escuela aprendemos una tonadita: «*El primero al cuadrado más dos veces el primero por el segundo más el segundo al cuadrado*»; así, el resultado es

$$\begin{aligned}(2a-3)(2a-3) &= (2a)^2 + 2(2a)(-3) + (-3)^2 \\ &= 4a^2 - 12a + 9,\end{aligned}$$

marcado con **d**, luego la relación es **3d**, que, en efecto, aparece a continuación en la propuesta **C)**.

Finalmente, para el factor **4**, $(2a-1)(4a^2+2a+1)$, sólo queda el producto **b**, $8a^3-1$ que se trata de una *diferencia de cubos* (recuerda que $1^3=1$). La relación correspondiente es **4b**, la última en la respuesta **C)**.

Verificamos que las relaciones **3d** y **4b** están en la respuesta que elegimos, **C)**.

Observamos que para ubicar la respuesta correcta bastó calcular sólo los dos primeros factores. ☺

2 Número más cercano

¿Cuál es el número más cercano a $1.3 - 8$?

- ◯ **A)** -7
- ◯ **B)** -5
- ◯ **C)** $+7$
- ◯ **D)** $+5$

La pregunta es acerca de un número expresado como el resultado de una operación. En el segundo párrafo hay cuatro propuestas de respuesta, debemos escoger la correcta.

Primero hay que averiguar cuál es el número, después comparamos la distancia de *ese* número a los números propuestos como respuesta y escogemos la menor de esas distancias.

También podemos ubicar el número en cuestión y los candidatos a respuesta en la *recta numérica* [3, p. 7], y visualmente ubicar al más cercano (si no hay confusión).

Comencemos con averiguar cuál es el número $1.3 - 8$. Se trata de una operación de suma de dos números con signo distinto, $1.3 + (-8)$. Hay una receta que nos enseñan en la escuela: «*se restan los números y se pone el signo del mayor*», es una receta, no explica gran cosa; la aplicamos y efectuamos la resta $8 - 1.3$, el resultado es 6.7, ahora el signo, 8 es mayor que 1.3 y tiene signo negativo, luego el resultado de la operación es

$$1.3 - 8 = -6.7.$$

Quizás es más claro si vemos la operación en la recta numérica, ubicamos el 1.3 y el −8. Hay dos maneras de efectuar la operación [3, pp. 10–16], una es ubicar el número 1.3 y *moverse* 8 *unidades hacia la izquierda* o, de manera equivalente, ubicar el número −8 y *moverse* 1 *unidad y* 3 *décimas a la derecha*. En ambos casos obtenemos el número −6.7.

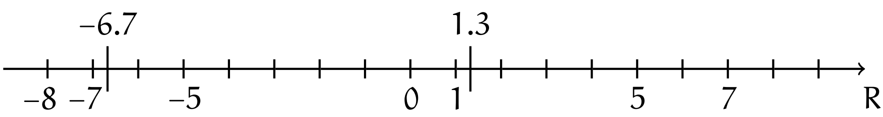


Figura 2.1 ¿Quién está más cerca de −6.7

Ahora bien, ¿cuál número, de los propuestos: −7, −5, 5 ó −7 está más cerca de −6.7?

En la Figura 2.1 vemos que de los números propuestos, es −7 el más cercano a −6.7, luego la respuesta es **A)**.

La elección del número −7 como el más cercano se pudo realizar fácilmente observando la figura, de no ser así, habría que calcular la *distancia* de −6.7 a cada uno de los candidatos y elegir la menor de ellas. Si representamos o *denotamos* la distancia de un número a a un número b como $d(a, b)$, y la definimos como

$$\text{Distancia de } a \text{ a } b = d(a, b) = |a - b|,$$

Donde $|x|$ denota al *valor absoluto* del número x, que se define como

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Respecto al valor absoluto de un número, si el número es negativo su valor absoluto es *menos* el número (su recíproco aditivo), si el número es positivo (o cero), su valor absoluto es el mismo número. Así, $|-3| = -(-3) = 3$ y $|3| = 3$.

Usando el valor absoluto, la distancia de -3 a 5 es $d(3,5) = |3-5| = |3-(-5)| = |8| = 8$.

Volviendo a nuestro problema, calculamos la distancia de 6.7 a cada candidato

$$\begin{aligned} d(-6.7,-7) &= |-6.7-(-7)| = |-6.7+7| = |0.3| = 0.3, \\ d(-6.7,-5) &= |-6.7-(-5)| = |-6.7+5| = |-1.7| = 1.7, \\ d(-6.7,5) &= |-6.7-5| = |-11.7| = 11.7, \\ d(-6.7,7) &= |-6.7-7| = |-13.7| = 13.7. \end{aligned}$$

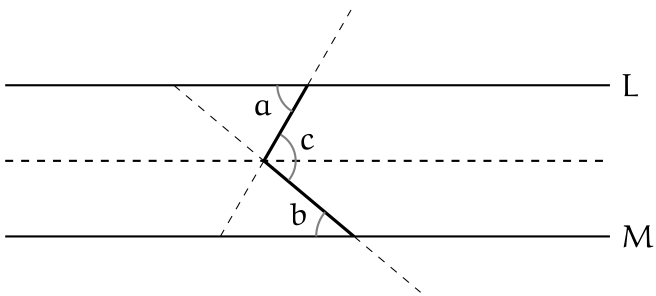
El *conjunto* D de las distancias de -6.7 a cada candidato es

$$D = \{0.3, 1.7, 11.7, 13.7\}.$$

Vemos que la *menor* de esas distancias es 0.3, que corresponde a la distancia de -6.7 a -7, por lo cual la respuesta es **A)**. ☺

3 Ángulos y triángulos

Si el ángulo a mide 60°, el ángulo b mide 40°, y las rectas L y M son paralelas, ¿cuánto mide el ángulo c?



- ◯ **A)** 20°
- ◯ **B)** 80°
- ◯ **C)** 90°
- ◯ **D)** 100°

En este problema se dan unas hipótesis sobre varias componentes de la figura y se pide identificar el valor del ángulo c.

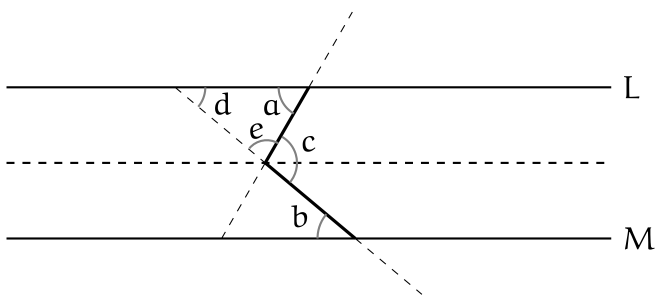
Si examinamos la figura vemos que el ángulo c es ligeramente mayor que un ángulo recto es decir, es un poco mayor que 90°.

Ahora examinamos las propuestas de respuesta y vemos que sólo **D)** presenta un valor *mayor* que 90°, luego esa *tiene* que ser la respuesta correcta!!

Nota que *en realidad* no averiguamos cuál es el valor del ángulo c, sino que al examinar la figura y las propuestas de respuesta concluimos que la correcta era **D)**. Hallamos un *atajo* y lo usamos.

A manera de comprobación, obtenemos el valor del ángulo c por medios "legales"!!!

Examinamos de nuevo la figura y señalamos además los ángulos d y e para ilustrar el razonamiento.



La situación en la figura es de dos rectas paralelas cruzadas por dos secantes, formando varios ángulos[1].

Los ángulos b y d son *alternos internos* y por lo tanto son *congruentes*, es decir, tienen el mismo valor (miden lo mismo).

En la parte superior de la figura vemos formado un *triángulo* con *ángulos* a, d y e. Recuerda que la *suma* de los valores de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, es decir

$$\sphericalangle a + \sphericalangle d + \sphericalangle e = 180^\circ.$$

[1] *Ver* https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81ngulos_entre_paralelas

Como $\sphericalangle b = \sphericalangle d = 40°$ y $\sphericalangle a = 60°$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sphericalangle a + \sphericalangle d + \sphericalangle e &= 180° \\ 60° + 40° + \sphericalangle e &= 180° \\ 100° + \sphericalangle e &= 180° \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sphericalangle e &= 180° - 100° \\ \sphericalangle e &= 80°. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que el ángulo e mide 80°.

Ahora bien, los ángulos e y c son *ángulos suplementarios*, es decir, la suma de sus valores es de 180°, o dicho de otra manera, son *ángulos contiguos* que forman un *ángulo llano*, pero ya obtuvimos que el ángulo e mide 80°. En términos algebraicos,

$$\begin{aligned} \sphericalangle c + \sphericalangle e &= 180° \\ \sphericalangle c + 80° &= 180° \\ \sphericalangle c &= 180° - 80° \\ \sphericalangle c &= 100°. \end{aligned}$$

Concluimos que el ángulo c mide 100° por lo cual, la respuesta correcta es **D)**. ☺

Nota: Se recomienda el libro *MATEMÁTICAS: Un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*, en la sección 11.3, páginas 710–726, [1] para repasar estas cuestiones elementales de geometría.

4 Compra y cambio

El señor Ramírez realizó la compra de 4 productos, 3 de los cuales costaron \$12 cada uno y el otro \$10. Si pagó con un billete de \$100, ¿cuál fue el monto devuelto por el cajero de la tienda?

- ◯ **A)** \$22
- ◯ **B)** \$46
- ◯ **C)** \$54
- ◯ **D)** \$78

Una persona realiza una compra, paga con un billete y nos preguntan cuál es el cambio recibido.

En primer lugar hay que obtener el monto de la compra, después, al valor del billete usado para pagar hay que restar el monto de la compra para obtener el cambio devuelto.

La compra consistió en 4 productos. Para calcular el monto de la compra hay que sumar el valor de cada producto. Pero 3 productos costaron \$12 cada uno, es decir, el monto de esos tres productos es $3 \times \$12 = \$36$. Ahora sumamos el precio del cuarto producto, $\$36 + \$10 = \$46$.

El monto de la compra es de \$46.

Se pagó la compra con un billete de \$100, el empleado cobró de ahí \$46 y devolvió \$100 – \$46 = \$54.

El monto devuelto (el cambio) es de \$54.

La propuesta **C)** es la respuesta correcta.

En los casos de pagos y cambios, se trata de calcular primero el monto de la compra, que es la suma de los precios de los productos adquiridos. Después, al valor del billete con el que se paga hay que restar el monto de la compra, así obtendremos el monto devuelto.

Cambio = Valor del billete de pago – Monto de la compra.

5 Multiplicación de binomios

El resultado de la multiplicación de $(2x-3)(2x+3)$ es:

- ◯ **A)** $4x-9$
- ◯ **B)** $4x^2-12x-9$
- ◯ **C)** $4x^2-9$
- ◯ **D)** $4x^2-12x+9$

Nos piden ubicar, en el segundo párrafo de propuestas, el resultado de una operación algebraica, en este caso la multiplicación de dos binomios.

Se trata de una multiplicación de *binomios conjugados*, sólo difieren en el signo. El resultado de esta multiplicación es la *diferencia de cuadrados* $(2x)^2-3^2$ que es igual a $4x^2-9$, que corresponde a la propuesta **C)**. ☺

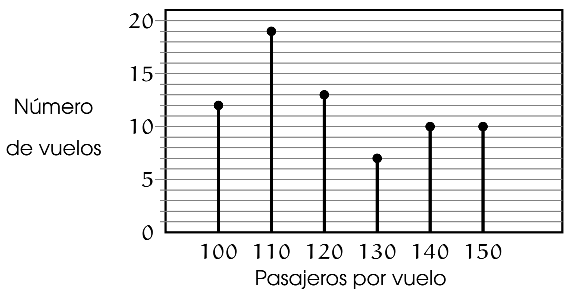
Si olvidas la *receta*, simplemente puedes efectuar el producto de los dos binomios:

$$\begin{aligned}(2x-3)(2x+3) &= 2x(2x+3)-3(2x+3)\\ &= 4x^2+6x-6x-9\\ &= 4x^2-9.\end{aligned}$$

☺

6 Moda

De acuerdo con la siguiente gráfica, ¿cuál es la *moda* de pasajeros en el número de vuelos?



- ◯ **A)** 150
- ◯ **B)** 110
- ◯ **C)** 120
- ◯ **D)** 140

Muestran una gráfica que compara datos de número de pasajeros que abordan un vuelo contra las veces que se ha presentado dicha situación. Nos piden que ubiquemos el dato que corresponde a un concepto de estadística.

Primero hay que entender el significado de la gráfica. Después hay que ver la definición del concepto *moda*, y finalmente ubicar en las propuestas del segundo párrafo, el dato que corresponda al concepto requerido.

En el eje horizontal de la gráfica se ven los números 100, 110, 120, 130, 140 y 150, con el letrero "*Pasajeros por número de vuelo*", eso significa que arriba de cada número se señalará las veces que ha habido vuelos con ese número de pasajeros, por ejemplo en la gráfica vemos que 7 vuelos han llevado 130 pasajeros y que 12 vuelos han llevado 100 pasajeros.

La *moda* de un conjunto de datos es el resultado que se presenta con más frecuencia, o más veces.

Por ejemplo, tenemos tres niñas, *Ana*, *Beatriz* y *Carla*, y dos niños, *Adrián* y *Jorge*, y las letras del alfabeto. Los datos son, a cada letra del alfabeto (eje horizontal) decir cuántas personas tienen nombre que inicie en esa letra. Vemos que con A inician 2 nombres, con B inicia 1 nombre, con C inicia 1 nombre, con J inicia 1 nombre y con las demás letras inician 0 nombres. ¿Con cuál letra inician más nombres? Vemos que con A, así, la *moda* es A.

De manera análoga con el número de pasajeros en un vuelo, vemos que 19 vuelos han llevado 110 pasajeros, ese es el mayor número de vuelos que han llevado un determinado número de pasajeros, en este caso 110, luego la *moda es* 110 y la respuesta es **B)**. ☺

7 Exponentes

El resultado de la siguiente operación $5x^3(-2x^2)$ es:

- ◯ **A)** $10x^6$
- ◯ **B)** $-10x^5$
- ◯ **C)** $-10x$
- ◯ **D)** $3x$

Se plantea una operación algebraica, en este caso de dos *monomios*. Se pide identificar el resultado entre las propuestas del segundo párrafo.

En este caso los monomios tienen signo distinto, lo cual significa que el producto tiene signo *menos* $(-)$, después multiplicamos los coeficientes, $5 \times 2 = 10$ y nos queda multiplicar las expresiones con exponentes:

$$5x^3(-2x^2) = -(5x^3)(2x^2) = -10(x^3x^2).$$

Recuerda que $x^3 = \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{tres veces}}$, y que $x^2 = \underbrace{x \cdot x}_{\text{dos veces}}$, así,

$$x^3x^2 = \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{tres veces}} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{\text{dos veces}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{cinco veces}} = x^{(3+2)} = x^5.$$

Luego

$$5x^3(-2x^2) = -10x^5.$$

La respuesta es **B)** ☺

8 Juego inventado

Alejandro y Roberto inventaron un juego en que se ganan y pierden puntos al tirar dados. El ganador es quien obtiene el mayor puntaje. La siguiente tabla muestra los puntos que obtuvieron en cada uno de los 5 turnos del juego, los números negativos son puntos perdidos y los positivos son puntos ganados.

Turno	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Alejandro	5	–4	2	–3	4
Roberto	–3	6	5	0	–2

¿Cuántos puntos le faltan al que perdió el juego para obtener el puntaje del ganador?

- ◯ **A)** 5
- ◯ **B)** 2
- ◯ **C)** 3
- ◯ **D)** 4

Se presenta una situación, se juega un juego, hay una tabla que muestra varios resultados. Te preguntan acerca de los puntos obtenidos por los jugadores.

Realmente no importa cuál es el juego, ni siquiera se describe. Lo importante es que Alejandro y Roberto jugaron cinco turnos cada uno y obtuvo los resultados colocados en la tabla.

En la pregunta se pide comparar los puntos del perdedor con los del ganador.

Para comparar esos puntos debemos saber cuántos puntos obtuvo cada jugador.

Sumamos los puntos obtenidos y vemos que

$$\begin{aligned} \text{Alejandro obtuvo } & 5+(-4)+2+(-3)+4=4 \text{ puntos,} \\ \text{Roberto obtuvo } & (-3)+6+5+0+(-2)=6 \text{ puntos.} \end{aligned}$$

Te piden que digas cuántos puntos le faltaron a quien perdió, para alcanzar el puntaje de quien ganó.

Vemos que a Alejandro (que obtuvo 4 puntos) le faltaron 2 puntos para obtener el puntaje de Roberto.

Así, la respuesta es **B)**. ☺

9 Factoriza la expresión

Factoriza la siguiente expresión

$$a^2 + ab - ab - b^2$$

- ◯ **A)** $(a + b)(a - b)$
- ◯ **B)** $(a - 2b)^2$
- ◯ **C)** $(2a + b)^2$
- ◯ **D)** $(2a + b)(a - 2b)$

Se presenta una expresión algebraica y se pide expresarla como producto de dos binomios e identificar el resultado en las respuestas propuestas en el segundo párrafo.

En primer lugar debemos simplificar la expresión algebraica presentada, vemos que el segundo y tercer término son recíprocos aditivos, es decir, al sumarlos se obtiene 0,

$$\begin{aligned} a^2 + ab - ab - b^2 &= a^2 + (ab - ab) - b^2 \\ &= a^2 + 0 - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

La expresión algebraica presentada se reduce a $a^2 - b^2$, que se trata de uno de los llamados *productos notables*[1], la *diferencia de cuadrados*, que se *factoriza* como

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Luego la respuesta correcta es **A)**. ☺

Si no recuerdas los productos notables puedes efectuar las operaciones en cada una de las respuestas propuestas hasta encontrar la expresión que de como resultado $a^2 - b^2$.

Veamos la primera, **A)** $(a+b)(a-b)$,

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b)\\ &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 + ab - ab - b^2.\end{aligned}$$

¡Sorpresa! al efectuar el producto $(a+b)(a-b)$ obtenemos la expresión inicial, incluso antes de simplificarla. Bien, hemos hallado que la respuesta correcta es **A)** y nos hemos ahorrado el cálculo de los productos restantes. ☺

[1] *Ver* https://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables

10 Desarrolla

Desarrolla la expresión

$$(4m - n)^2$$

- ◯ **A)** $4m^2 - 8mn - n^2$
- ◯ **B)** $4m^2 - 8mn + n^2$
- ◯ **C)** $16m^2 - 8mn + n^2$
- ◯ **D)** $16m^2 + 8mn - n^2$

El término *Desarrollar*, referido a una expresión algebraica se refiere a efectuar todas las operaciones señaladas. Te piden localizar la respuesta en las propuestas del segundo párrafo.

En este caso la operación es *elevar al cuadrado* un binomio.

Hay una *tonadita* que nos enseñan en la secundaria para elevar un binomio al cuadrado,

> El primero al cuadrado, más dos veces el primero
> por el segundo, más el segundo al cuadrado.

Procedamos, el primer término del binomio es $4m$ y el segundo[1] es $-n$.

[1] Pues $4m - n = 4m + (-n)$.

El primero al cuadrado, $(4m)^2 = 16m^2$;

Dos veces el primero por el segundo, $2(4m)(-n) = -8mn$;

El segundo al cuadrado, $(-n)^2 = n^2$.

La suma de los términos es el resultado de elevar al cuadrado el binomio,

$$(4m - n)^2 = 16m^2 - 8mn + n^2.$$

La propuesta del segundo párrafo correspondiente a la respuesta es **`C)`**. ☺

Pero si no recuerdas o no sabes la tonadita, puedes efectuar directamente la operación pedida,

$$\begin{aligned}(4m - n)^2 &= (4m - n)(4m - n) \\ &= 4m(4m - n) - n(4m - n) \\ &= (4m)^2 - 4mn - 4mn + (-n)^2 \\ &= 16m^2 - 8mn + n^2.\end{aligned}$$

Y obtienes el mismo resultado. ☺

11 Anillo

¿Cuál planteamiento algebraico permite conocer solo el costo del anillo?

En una tienda de bisutería, una pulsera y un anillo cuestan \$300. La pulsera cuesta \$60 más que el anillo.

○ A) $x + y = 300$
$x = y + 60$

○ B) $x + y = 300$
$x = y - 60$

○ C) $x - y = 300$
$x = y + 60$

○ D) $x - y = 300$
$x = 60 - y$

Vemos el enunciado de un problema y varias propuestas de respuesta. La pregunta es acerca del planteamiento del problema, te piden que digas cuál es el planteamiento correcto para resolver el problema.

En el problema dicen cuál es el precio de *dos* artículos, una pulsera y un anillo. Y dicen cuánto cuesta la pulsera respecto al precio del anillo.

Aquí conviene hacer un *modelo matemático* de la situación. Para traducir la situación a un lenguaje matemático, denotemos con x a la pulsera y con y al anillo.

La frase "una pulsera y un anillo cuestan \$300" se traduce como $x + y = \$300$.

La frase "la pulsera cuesta \$60 más que el anillo" se traduce como $x = y + \$60$.

Así, el planteamiento algebraico del problema es

$$\begin{aligned} x + y &= 300 \\ x &= y + 60, \end{aligned}$$

que corresponde a la propuesta **A)**.

El modelo obtenido es un *sistema de* dos *ecuaciones* lineales; en la primera ecuación substituimos el valor de x expresado en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} (y + 60) + y &= 300 \\ 2y &= 300 - 60 \\ y &= \frac{240}{2} \\ y &= 120. \end{aligned}$$

Al substituir este valor de y en la segunda ecuación, obtenemos el valor de x,

$$\begin{aligned} x &= y + 60 \\ &= 120 + 60 \\ &= 180. \end{aligned}$$

Vemos entonces que la pulsera cuesta \$180 y el anillo cuesta \$120, precios que cumplen con las condiciones del problema. ¿Quién nos preguntó ésto? ¡Nadie! Lo resolvimos como pilón.

12 Viaje en globo

Una persona que viaja en un globo aerostático a 700 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 16°. ¿A cuántos metros se encuentra el pueblo?

Considera:
seno $16^\circ = 0.2756$; coseno $16^\circ = 0.9613$; tangente $16^\circ = 0.2867$.

- ○ **A)** 201
- ○ **B)** 728
- ○ **C)** 2,442
- ○ **D)** 2,540

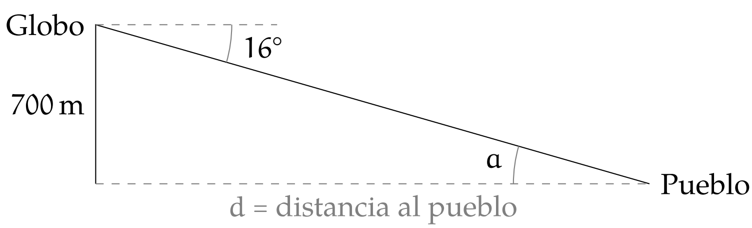
Te describen una situación de una persona que ve un pueblo y te preguntan a qué distancia está el pueblo. Además te dan unos datos de *funciones trigonométricas* de un ángulo. Finalmente hay que ubicar la respuesta correcta entre las propuestas debajo de la raya horizontal.

Es necesario comprender la pregunta, por ejemplo, ¿qué significa *ángulo de depresión*?

Cuando parados en la calle vemos a lo alto de un edificio, el ángulo formado por la línea de la calle y la línea de la dirección de nuestra mirada es un *ángulo de elevación*, elevamos la mirada para ver a lo alto del edificio.

Sí estamos parados en lo alto de la pirámide del sol, en Teotihuacán, y vemos a las personas que están abajo de la pirámide, el ángulo que forma nuestra vista hacia el horionte con la vista hacia abajo de la pirámide, es un *ángulo de depresión*, bajamos la mirada para ver hacia abajo.

Así, nos dicen que una persona en un globo a 700 m, al bajar 16° la mirada, distingue un pueblo. Tracemos una figura para ilustrar la situación.



Desde el Globo a 700 m de altura, con un ángulo de depresión de 16° se distingue un Pueblo. Hay que hallar la distancia d al Pueblo.

¿Estás de acuerdo en que el ángulo de depresión de 16° desde el Globo, mide lo mismo que el ángulo de elevación α desde el Pueblo?

¡Claro pues esos ángulos son *alternos internos*![1].

Por lo tanto, la tangente de 16° es igual a la tangente de α que es, según los datos dados al principio del problema, 0.2867. Recordamos, de las *relaciones trigonométricas* definidas en un *triángulo rectángulo*[2], que la tangente de un ángulo es la razón del cateto opuesto al cateto adyacente.

[1] *Ver MATEMÁTICAS: Un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*, sección 11.3, páginas 710–726.

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_rect%C3%A1ngulo.

Así,

$$\text{tangente } 16^\circ = \frac{700}{d}.$$

De la fórmula anterior despejamos d y obtenemos

$$\begin{aligned} d &= \frac{700}{\text{tangente } 16^\circ} \\ &= \frac{700}{0.2867} \\ &= 2442. \end{aligned}$$

Es decir que la distancia al pueblo es de 2,442 m, y la respuesta es **C)**. ☺

Bibliografía

[1] Rick Billstein, Shlomo Libeskind y Johnny W. Lott. *MATEMÁTICAS: Un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*. Trad. por Manuel López Mateos. México: López Mateos Editores, 2012. isbn: 978-6079558321. url: https://lopez-mateos.com.

[2] *Guía Interactiva 2018*. comipems. 2018. url: http://bit.ly/2PngcJs.

[3] Manuel López Mateos. *Matemáticas básicas*. 2018. url: https://matbas.mi-libro.club/.

[4] George Pólya. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas, 1989. isbn: 978-9682400643. url: http://www.etrillas.com.mx/detalle.php?isbn=9789682400643&estilo=&tema=17.

[5] George Pólya. *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945. url: https://press.princeton.edu/titles/669.html.

[6] George Pólya. *Mathematical Discovery, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1981. url: https://www.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471089753.html.

Índice alfabético

Manuel López Mateos inició su actividad docente en 1967 en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha impartido cursos de Cálculo diferencial e integral, Análisis matemático, Álgebra lineal y Topología diferencial, entre otros. En particular, en el año de 1972, impartió, en el entonces Centro de Didáctica de la UNAM, Cursos de capacitación para la primera generación de profesores de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM. Ha traducido más de 15 importantes libros de texto de matemáticas. En el año de 2003, fue el director fundador de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.

El Concurso de Asignación a la Educación Media Superior (CAEMS) lo organiza la Comisión Metropolitana de Instituciones Públicas de Educación Media Superior (COMIPEMS) en el área conurbada de la ciudad de México.

En este folleto explicamos los problemas de matemáticas propuestos por el COMIPEMS en la *Guía Interactiva*, presentando así un abanico de métodos que cubren buena parte del material requerido.

MLM
EDITOR
https://aprendomate.mi-libro.club